МУНИЦИПАЛЬНОЕ АВТОНОМНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«СРЕДНЯЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ШКОЛА № 2»

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
Сертификат 00ACAA472F4A3DE2173C3B211043434703
Владелец Александрова Елена Владимировна
Действителен с 07.08.2024 по 31.10.2025

Утверждаю
Е.В. Александрова

Приказ МАОУ СОШ № 2
от 09.01.2025 № 25

ТОЧКА РОСТА

Дополнительная общеобразовательная общеразвивающая программа
«Математика: от идеи к решению»

Направленность: техническая
Возраст учащихся: 11 – 15 лет
Объём: 72 часа

Автор: Скоробогатова Ю.А.

г. Покачи

2025

1. Пояснительная записка

1.1 Актуальность и значимость программы

Рост информационной насыщенности, значительно возросшая в конце второго тысячелетия скорость обновления знаний, выдвигают в качестве одной из наиболее значимых задач современного общества подготовку специалистов, обладающих выраженными навыками профессиональной математической деятельности в различных отраслях науки и практики. Стремительная математизация и информатизация многих областей знания, сфер человеческой деятельности, возросшая роль математических знаний, логического стиля мышления, математической культуры требует уделить особое внимание математическому образованию школьников уже с младших классов.

В то же время естественная дифференциация обучающихся по склонности к мышлению различного типа предполагает создание условий для развития детей с признаками интеллектуальной одаренности в области математики. Развитие математических способностей одаренных школьников, их специфических логических и алгоритмических навыков, умственной (в том числе, математической) культуры будет наиболее эффективным при соответствующей поддержке, которую дети получают в системе дополнительного образования.

1.2. Основные идеи, подходы, принципы

Отличительные особенности дополнительной общеобразовательной – дополнительной общеразвивающей программы «Математика: от идеи к решению» от программ дополнительного образования, реализуемых в ходе систематических занятий математикой в течение года, во многом продиктованы форматом учебно-тренировочных сборов. Обучающиеся оказываются погруженными в информационно насыщенную математическую среду, вовлекаются во взаимодействие как с профессиональными математиками, так и с ребятами со схожими интересами и потребностями. Участники сборов получают поддержку со стороны сверстников, что позволяет им не уйти в социальную изоляцию, а, напротив, найти для себя референтную группу. Это положительно сказывается на самооценке и самоуважении, а стремление удержаться в данной референтной группе (что потребует продолжение систематических занятий математикой) обладает дополнительным мотивирующим действием.

Нацеленность программы на «сильных» и мотивированных обучающихся позволяет ориентироваться на более высокий начальный образовательный уровень, дает возможность предлагать для освоения глубокие содержательные разделы современной математики, создает идеальную рабочую обстановку. На ряду с этим особое внимание отводится работе в малых группах, проведению индивидуальных консультаций и математических мероприятий. Это позволяет в большей степени удовлетворить индивидуальные образовательные потребности обучающихся, создавая условия для адекватного индивидуального развития, самореализации.

В основу реализации данной программы положены следующие основные принципы:

- изучение новых областей математики, овладение научными умениями и навыками производится в предположении строгой логической обоснованности переходов от одного раздела математики к другому, что составляет принцип систематичности и последовательности;

- в ходе занятий обучающимся сообщаются знания, основанные на проверенных и обоснованных положениях, фактах, теориях, что является основной составляющей принципа научности;
- принцип сознательности и активности, предполагающий понимание учащимися смысла усваиваемой информации, понимание цели и значимости учебной деятельности.

1.3. Целевая аудитория программы

Программа ориентирована на обучающихся 13-15 лет (7–8 классов).

Группа	Количество часов		
	Всего	Теория	Практика
7-8 класс	72	26	46

1.5. Особенности организации образовательного процесса

Организация образовательного процесса предполагает проведение теоретических и практических занятий.

Теоретические занятия состоят из лекций и самостоятельной работы с теоретическим материалом.

В основе практических занятий лежит индивидуальное выполнение различных заданий, преимущественно направленных на решение математических задач, а также проведение групповых обсуждений и консультаций. Также практическая составляющая обогащена активными формами обучения, участием обучающихся в личных математических соревнованиях, имитирующих научно-исследовательскую деятельность и прививающих умения и навыки, свойственные будущей научной работе. Усиление научного содержания программы требует также систематического использования исследовательского метода в обучении, его следует рассматривать как такую организацию занятий, при которой обучающиеся осознают огромную значимость изучаемой проблемы, пользуются методами, понятиями для решения поставленной проблемы.

На занятиях помимо общематематических идей большое внимание уделяется изучению методов, специфических для отдельных направлений математики (алгебры и теории чисел, геометрии, комбинаторики и теории графов).

Наряду с проведением общих занятий в группе предполагается индивидуальная работа с обучающимися в соответствии с локальными образовательными задачами: индивидуальные консультации, работа над заданиями для самостоятельной работы, сдача выполненных задач, обсуждение возможных направлений индивидуальной работы.

2. Цель и задачи программы

Цель: развитие интеллектуальных и творческих способностей высокомотивированных обучающихся, формирование математической культуры в процессе углубленного изучения математики. **Задачи:**

Метапредметные:

- формировать и развивать математическую интуицию, логическое, алгоритмическое и эвристическое мышление;
- развивать способности глубоко и самостоятельно разбираться в сложных математических проблемах.

Личностные:

- активизировать познавательную деятельность;
- формировать математическую культуру.

Предметные:

- расширить знания обучающихся по математике;
- обучить новым способами и методами решения математических задач;
- формировать умение адекватного и эффективного применения изученных методов и принципов в решении математических задач.

3. Содержание программы

№ п/п	Название модуля	Кол-во часов	Теория	Практика	Формы контроля
1	Принцип Дирихле	4	2	2	Фронтальный опрос, обсуждение задач, дискуссия
2	Основы теории чисел	6	2	4	Фронтальный опрос, обсуждение задач, дискуссия
3	Индукция и индукционные построения	6	2	4	Фронтальный опрос, обсуждение задач, дискуссия
1	Числовые и алгебраические неравенства	8	2	6	Фронтальный опрос, обсуждение задач, дискуссия
2	Избранные вопросы геометрии	16	6	10	Фронтальный опрос, обсуждение задач, дискуссия
3	Избранные вопросы комбинаторики	10	4	6	Фронтальный опрос, обсуждение задач, дискуссия
1	Общие методы решения математических задач	14	4	8	Фронтальный опрос, обсуждение задач, дискуссия
3	Теория графов	8	4	6	Фронтальный опрос, обсуждение задач, дискуссия
	Итого	**72**	**26**	**46**	

Тема 1. Принцип Дирихле (4 ч.) *Теория:*

- Принцип Дирихле: общее представление.
- Обобщенный вариант принципа Дирихле.
- Принцип Дирихле в арифметических задачах. *Практика*: Решение задач по теме.

Обучающиеся получают представление о простом и обобщенном принципе Дирихле, отрабатывают умение преобразовывать интуитивные предпосылки в форму строгого математического доказательства. Дополнительно повторяются общие методы и схемы доказательств: доказательство от противного, оценка и пример; обсуждаются возможности неконструктивных доказательств существования объектов (на примере решения задач на доказательство существования чисел с определенными свойствами), развивается умение различать условие задачи (посылку) и заключение (вывод), формируется понимание отличие интуитивных выводов и суждений от строгих доказательств. В ходе изучения данной темы повторяются свойства делимости и остатков, которые органично используются как этапы доказательств и решений задач.

Тема 2. Основы теории чисел (6 ч.) *Теория:*

- Десятичная запись числа.
- Делимость и остатки: свойства остатков.
- Признаки делимости.

Практика: решение задач по теме

Обучающиеся повторяют основные понятия, связанные с делимостью целых чисел, закрепляют понимание базовых свойств делимости. Особое внимание следует обратить на разложение составных чисел на простые множители, на основную теорему арифметики (о существовании и единственности разложения на простые множители). При решении задач учащиеся повторяют простейшие признаки делимости, закрепляют навык их использования для эффективного поиска делителей числа и разложения натурального числа на простые множители. Свойства остатков сначала демонстрируются на арифметических примерах, после этого важно провести строгое доказательство используемых свойств, на их примере также продемонстрировав и структуру доказательства теоретико-числовых свойств, и способ записи доказательств.

Свойства делимости и остатков чисел используются при обосновании признаков делимости. Доказываются привычные по школьному курсу признаки делимости на 2, 4, 8, 3, 9, 11, 5, демонстрируется вывод новых признаков делимости чисел (для десятичной записи).

Тема 3. Индукция и индукционные построения (6 ч.) *Теория:*

- Последовательного конструирование примеров.
- Классическая схема математической индукции. *Практика:* решение задач по теме.

Пропедевтический этап формирования представлений о математической индукции как методе решения задач рекомендуется построить на основе последовательного построения конструкций: от построения нескольких примеров с небольшим количеством составных частей (слагаемых, фигурок при разрезании, закрашенных клеток и так далее) перейти к идее обоснования того, что такой пример можно построить для любого количества составляющих. В дальнейшем даже при рассмотрении строгой схемы математической индукции (с обоснованием базы индукции и индукционного перехода) полезно обосновать требуемое утверждение для небольших значений параметра задачи, желательно используя в доказательстве доказательства уже доказанные утверждения для меньших значений параметра. В любом случае важно ввести метод математической индукции как универсальный (общематематический) метод решения задач. Для этого необходимо продемонстрировать возможность применения данного метода в различных областях математики: при доказательстве числовых тождеств и неравенств, при решении комбинаторных задач, при доказательстве некоторых свойств графов.

Тема 4. Числовые и алгебраические неравенства (8 ч.) *Теория:*

- Числовые (арифметические) неравенства. Основные свойства неравенств.
- Разложение на множители для доказательства неравенств.
- Выделение полных квадратов для доказательства неравенств.
- Классические неравенства о средних. *Практика:* решение задач по теме.

Основные свойства алгебраических неравенств (транзитивность, алгебраические свойства – условия, при которых сохраняются или меняются знаки неравенства при выполнении арифметических операций) будет удобно повторить на примере сравнения числовых арифметических выражений. Для доказательства алгебраических неравенств рекомендуется продемонстрировать подходы, связанные с разложением выражения на множители и перебором вариантов расстановки знаков. Обучающимся будет полезно ознакомиться также с методом доказательства неравенств и нахождения наибольших/наименьших значений, основанным на выделении полного квадрата в алгебраическом выражении. Изученные свойства и методы доказательства неравенств используются для доказательства классических неравенств о средних (среднем арифметическом, среднем геометрическом, среднем квадратическом, среднем гармоническом) для двух и четырёх переменных. Навыки применения классических неравенств закрепляются в ходе решения задач.

Тема 5. Избранные вопросы геометрии (16 ч.) *Теория:*

- Площади, основные свойства и соотношения.
- Площади многоугольников.
- Равновеликие и равносоставленные фигуры.
- Перегруппировка площадей.
- Использование площадей в геометрических задачах. *Практика:* решение задач по теме.

Обучающиеся рассматривают аксиомы площади, доказывают (выводят из аксиом) формулы для вычисления площадей многоугольников (квадрата, прямоугольника, параллелограмма, треугольника, трапеции). Для вычисления площадей, сравнения площадей плоских фигур и обоснования их равновеликости активно используется идея перегруппировки площадей, неявно обосновываются составные части теоремы о равносоставленных и равновеликих многоугольниках, используется формула включений/исключений. Также важным методом нахождения и оценки площадей является использование пропорциональных отрезков в многоугольниках.

Тема 6. Избранные вопросы комбинаторики (10 ч.) *Теория:*

- Планарные графы.
- Введение в теорию Рамсея. *Практика:* решение задач по теме.

Вводятся понятия плоского и планарного графа, описываются элементы плоского графа (вершины, рёбра и грани). Формулируется и доказывается формула Эйлера для плоского графа, обсуждается её обобщение на многогранники. Обосновываются неравенства с вершинами, рёбрами и гранями в плоском графе. Обсуждается возможность использования доказанных соотношений при обосновании непланарности графов.

Обсуждаются различные варианты окраски графов (вершинные и реберные раскраски), доказываются некоторые свойства раскрасок (в том числе оцениваются хроматические числа графов). В результате последовательного обобщения задачи о существовании одноцветных полных подграфов формулируется и доказывается теорема Рамсея, обсуждается возможность её использования при решении различных задач комбинаторики и комбинаторной геометрии.

Тема 7. Общие методы решения математических задач (14 ч.) *Теория:*

- Двойной подсчёт.
- Принцип крайнего.
- Обратный ход и анализ с конца. *Практика:* решение задач по теме.

Основное внимание уделяется изучению общематематических идей и принципов решения задач, а также обсуждению возможности их применения в различных разделах и областях математики. Идея двойного подсчёта используется в комбинаторных задачах (формула включений-исключений), в разнообразных задачах на построение противоречий (инвариантность относительно способа подсчёта).

Принцип крайнего демонстрируется школьникам не только как удобный способ решения задач, но и в качестве простой идеи, позволяющей в значительной степени упростить перебор вариантов и избавить рассуждения от требующих высокой аккуратности рассуждений, связанных с процессами и последовательностями операция (рассуждения в стиле «так будем делать до тех пор, пока…», «будем продолжать, и рано или поздно наступит такой момент…», «и так далее будем каждый раз переходить к соседнему элементу…»). В сильной группе школьников полезно рассмотреть связь принципа крайнего с принципом математической индукции, обосновать эквивалентность (взаимозаменяемость) таких подходов для дискретных множеств.

Идею анализа с конца можно рассмотреть не только на примере рассмотрения последовательности операций в обратную сторону, но и как метод решения игровых задач (анализ выигрышных позиций в конечных антагонистических играх с полной информацией).

Все рассматриваемые идеи и методы закрепляются самостоятельным решением задач, обсуждаются и обобщаются (при активном участии преподавателя).

Тема 8. Теория графов (8 ч.) *Теория:*

- Планарные графы.
- Введение в теорию Рамсея.

Практика: решение задач по теме.

Вводятся понятия плоского и планарного графа, описываются элементы плоского графа (вершины, рёбра и грани). Формулируется и доказывается формула Эйлера для плоского графа, обсуждается её обобщение на многогранники. Обосновываются неравенства с вершинами, рёбрами и гранями в плоском графе. Обсуждается возможность использования доказанных соотношений при обосновании непланарности графов.

Обсуждаются различные варианты окраски графов (вершинные и реберные раскраски), доказываются некоторые свойства раскрасок (в том числе оцениваются хроматические числа графов). В результате последовательного обобщения задачи о существовании одноцветных полных подграфов формулируется и доказывается теорема Рамсея, обсуждается возможность её использования при решении различных задач комбинаторики и комбинаторной геометрии.

4. Планируемые результаты

Реализация дополнительной общеобразовательной – дополнительной общеразвивающей программы «Математика: от идеи к решению» предполагает следующие результаты:

Метапредметные:

- повышение общего интеллектуального и математического уровня обучающихся;
- развитие математической интуиции, логического, алгоритмического и эвристического мышления;
- умение глубоко и самостоятельно разбираться в сложных математических проблемах.

Личностные:

- формирование и развитие математической культуры;
- проявление познавательной активности

Предметные:

- овладение новыми идеями и методами решения математических задач;
- умение демонстрировать и применять изученные методы и принципы в решении математических задач.

1. Список литературы

1. Арнольд И. В. Принципы отбора и составления арифметических задач. – М.: МЦНМО, 2014.
2. Блинков А.Д. Классические средние в арифметике и в геометрии. – М.: МЦНМО, 2012
3. Вентцель Е. С.Элементы теории игр. – М.: Физматгиз, 1961.
4. Верещагин Н. К., Шень А.Х. Начала теории множеств. – М.: МЦНМО, 2002.
5. Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах. – М.: МЦНМО, 2005.
6. Гарднер М. Математические чудеса и тайны. – М.: Наука, 1978.
7. Генкин С.А., Интенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. – Киров: Аса, 1994.
8. Гиндикин С. Г. Алгебра логики в задачах. – М.: Наука, 1972.
9. Гордин Р.К. Это должен знать каждый матшкольник. (8-е издание, стереотипное) – М., МЦНМО, 2014.
10. Гуровиц В. М., Ховрина В. В. Графы (4-е, стереотипное) – М.: МЦНМО, 2014.
11. Евдокимов М.А. От задачек к задачам. – М.: МЦНМО, 2004.
12. Екимова М. А., Кукин Г. П. Задачи на разрезание. – М., МЦНМО, 2002.
13. Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи. – М.: МЦНМО, 1997.
14. Кноп К.А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам. - М.: МЦНМО, 2011
15. Козлова Е. Г. Сказки и подсказки. – М., МЦНМО, 2004.
16. Кордемский Б. А. Математическая смекалка. – М., ГИФМЛ, 1958.
17. Кэрролл Л. Логическая игра. – М.: Наука, 1991.
18. Левин А.Ю. Что такое комбинаторика. – М.: «Квант», 1999 г., № 5, 6
19. Медников Л. Э. Чётность (5-е, стереотипное) – М., МЦНМО, 2015.
20. Мерзон Г.А., Ященко И.В. Длина, площадь, объем. (3-е, стереотипное) – М., МЦНМО, 2015.
21. Муштари Д.Х. Подготовка к математическим олимпиадам. – Казань, 1990.
22. Перельман Я.И. Занимательная алгебра. – М.: Наука, 1974.
23. Раскина И. В, Шноль Д. Э. Логические задачи. – М., МЦНМО, 2015.
24. Сгибнев А.И. Делимость и простые числа. (3-е, стереотипное) – М., МЦНМО, 2015.
25. Спивак А.В.. Математический праздник. – М.: МЦНМО, 1995.
26. Толпыго А.К. Инварианты. – «Квант», 1976, №12.
27. Тригг Ч. Задачи с изюминкой.
28. Хага К. Оригамика. Геометрические опыты с бумагой (2-е, исправленное). – М.: МЦНМО, 2014.
29. Шарыгин И.Ф., Ерганжиева Л.Н. Наглядная геометрия. – М, 1992.
30. Шень А.Х. Игры и стратегии с точки зрения математики – М.: МЦНМО, 2007.
31. Шень А.Х. Математическая индукция (3-е издание, дополненное) – М.: МЦНМО, 2007.
32. Шень А.Х. Простые и составные числа – М.: МЦНМО, 2005.
33. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. – М.: Наука, 1981.